VỀ MỘT SỰ MỞ RỘNG CỦA BỔ ĐỀ BOREL–CANTELLI ĐỐI VỚI MẢNG HAI CHIỀU CÁC BIẾN CỐ PHỤ THUỘC

Nguyễn Thị Ngọc Anh, Nguyễn Thị Bình,
Lê Văn Thành, Nguyễn Thị Phương Thảo
Viện Sư phạm Tự nhiên, Trường Đại học Vinh
Ngày nhận bài 24/9/2020, ngày nhận đăng 15/12/2020

Tóm tắt: Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một sự mở rộng của bổ đề Borel–Cantelli đối với mảng hai chiều các biến cố phụ thuộc. Kết quả chính của chúng tôi nhận Định lý 2.1 của Petrov [Statistics and Probability Letters, 2002] và bổ đề Borel–Cantelli đối với mảng hai chiều các biến cố độc lập đôi một như là những trường hợp đặc biệt.
Từ khóa: Bổ đề Borel-Cantelli; mảng hai chiều; các biến ngẫu nhiên phụ thuộc.

1 Giới thiệu

Bổ đề Borel–Cantelli là một công cụ rất quan trọng để chứng minh các định lý giới hạn liên quan đến sự hội tụ đầy đủ và sự hội tụ hầu chắc chắn, đặc biệt là luật mạnh số lớn và một số định lý giới hạn khác đối với mảng nhiều chiều các biến ngẫu nhiên, chẳng hạn xem [6-9]. Do đó, các nhà nghiên cứu luôn muốn tìm cách để mở rộng kết quả này sang trường hợp các biến cố thỏa mãn những cấu trúc phụ thuộc khác nhau. Bổ đề Borel–Cantelli được mở rộng cho dãy các biến cố độc lập đôi một đầu tiên bởi hai tác giả Chung và Erdos [2], và sau đó, được mở rộng bởi một số tác giả như Kochen và Stone [3], Petrov [4], và Arthan và Oliva [1]. Xét không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Năm 2002, Petrov [4] đã mở rộng bổ đề Borel–Cantelli cho dãy các biến cố $\{A_n, n \geq 1\}$ thỏa mãn điều kiện

$$\mathbb{P}(A_iA_j) \leq K\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) \text{ với mọi } i \neq j, \tag{1.1}$$

trong đó $K \geq 1$ là hằng số. Rõ ràng, nếu $\{A_n, n \geq 1\}$ là dãy các biến cố độc lập đôi một, thì (1.1) được thỏa mãn với $K = 1$ và dấu đẳng thức xảy ra. Với điều kiện (1.1), Petrov [4, Theorem 2.1] đã chứng minh rằng

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) \geq \frac{1}{K}. \tag{1.2}$$

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh rằng kết quả của Petrov vẫn đúng đối với mảng hai chiều. Chúng tôi sử dụng phương pháp chứng minh của Petrov [4] để đưa ra một cách tiếp cận mới cho bổ đề Borel–Cantelli đối với mảng hai chiều các biến cố. Kết quả chính của chúng tôi nhận Định lý 2.1 của Petrov [4] và bổ đề Borel–Cantelli đối với mảng hai chiều các biến cố độc lập đôi một như là những trường hợp riêng.

[1]) Email: levt@vinhuni.edu.vn (L. V. Thành)

Trong chứng minh kết quả chính, chúng tôi có sử dụng định nghĩa giới hạn của mảng hai chiều các số thực. Trong bài báo này, ta sử dụng ký hiệu $a \vee b = \max\{a, b\}, a \wedge b = \min\{a, b\}$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Mảng hai chiều các số thực $\{a_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ được gọi là hội tụ về $a \in \mathbb{R}$ khi $m \wedge n \to \infty$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên N sao cho

$$|a_{m,n} - a| < \varepsilon \text{ với mọi } m, n \text{ thỏa mãn } m \wedge n \geq N.$$

Khi đó, ta viết

$$\lim_{m,n\to\infty} a_{m,n} = a \text{ hoặc } \lim_{m\wedge n\to\infty} a_{m,n} = a.$$

2 Kết quả chính

Định lý sau đây là kết quả chính của bài báo. Hai biến ngẫu nhiên X, Y thỏa mãn cấu trúc phụ thuộc tương tự như (1.1), cụ thể là

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \leq K\mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R},$$

được gọi là hai biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm mở rộng. Liu [5, Example 4.1, Example 4.2] đã chỉ ra tồn tại dãy các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một mở rộng nhưng không phụ thuộc âm đôi một. Họ các biến cố thỏa mãn (1.1) có thể được gọi là họ các biến cố *tương quan âm đôi một mở rộng*. Từ kết quả của Liu [5], ta suy ra tồn tại họ các biến cố tương quan âm đôi một mở rộng nhưng không tương quan âm đôi một, và do đó chúng không độc lập đôi một.

Định lý 2.1. Giả sử $\{A_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng hai chiều các biến cố thỏa mãn

$$\mathbb{P}\left(A_{i,j}A_{k,l}\right) \leq K\mathbb{P}(A_{i,j})\mathbb{P}(A_{k,l}) \text{ với mọi bộ số } (i, j) \neq (k, l), \tag{2.1}$$

trong đó $K \geq 1$ là một hằng số. Đặt

$$\limsup A_{m,n} = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{i\vee j\geq n} A_{i,j}.$$

Nếu

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_{m,n}) = \infty, \tag{2.2}$$

thì

$$\mathbb{P}\left(\limsup A_{m,n}\right) \geq \frac{1}{K}. \tag{2.3}$$

Chứng minh. Với mọi $i \geq 1, j \geq 1$, ta đặt

$$X_{i,j} = \mathbf{1}(A_{i,j}).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz , ta có

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{i,j}\right)\right)^2 &= \left(\mathbb{E}\left(\mathbf{1}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{i,j}>0\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{i,j}\right)\right)\right)^2\\ &\le \mathbb{E}\left(\mathbf{1}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{i,j}>0\right)\right)^2\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{i,j}\right)^2 \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{i,j}>0\right)\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{i,j}\right)^2.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}A_{i,j} &= \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{1}(A_{i,j})>0\right)\\ &= \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{i,j}>0\right),\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{i,j}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{1}(A_{i,j})\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(A_{i,j}), \tag{2.6}$$

và

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{i,j}\right)^2 &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{1}(A_{i,j})\right)^2\\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i,k=1}^{m}\sum_{j,l=1}^{n}\mathbf{1}\left(A_{i,j}\right)\mathbf{1}\left(A_{k,l}\right)\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i,k=1}^{m}\sum_{j,l=1}^{n}\mathbf{1}\left(A_{i,j}A_{k,l}\right)\right)\\ &= \sum_{i,k=1}^{m}\sum_{j,l=1}^{n}\mathbb{P}(A_{i,j}A_{k,l}).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Từ (2.4)–(2.7), ta suy ra

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(A_{i,j})\right)^2 \le \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}A_{i,j}\right)\left(\sum_{i,k=1}^{m}\sum_{j,l=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_{i,j}A_{k,l}\right)\right). \tag{2.8}$$

Từ giả thiết (2.2), ta thấy tồn tại m, n đủ lớn sao cho

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(A_{i,j}) > 0$$

và do đó từ (2.8), ta có

$$\sum_{i,k=1}^{m}\sum_{j,l=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_{i,j}A_{k,l}\right) > 0.$$

Kết hợp điều này với (2.8), ta suy ra

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}A_{i,j}\right) \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(A_{i,j})\right)^2}{\sum_{i,k=1}^{m}\sum_{j,l=1}^{n}\mathbb{P}(A_{i,j}A_{k,l})}. \tag{2.9}$$

Ta có thể thay đổi các chỉ số ở (2.9) để nhận được

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=m}^{M}\bigcup_{j=n}^{N}A_{i,j}\right) \geq \frac{\left(\sum_{i=m}^{M}\sum_{j=n}^{N}\mathbb{P}(A_{i,j})\right)^2}{\sum_{i,k=m}^{M}\sum_{j,l=n}^{N}\mathbb{P}(A_{i,j}A_{k,l})},\ M > m \geq 1, N > n \geq 1. \tag{2.10}$$

Với $M > m$, $N > n$ và m, n đủ lớn, ta đặt

$$T_1 = \sum_{\substack{(i,j)\neq(k,l)\\ m\leq i,k\leq M, n\leq j,l\leq N}}\mathbb{P}(A_{i,j})\mathbb{P}(A_{k,l}) \text{ và } T_2 = \sum_{i=m}^{M}\sum_{j=n}^{N}\mathbb{P}(A_{i,j}). \tag{2.11}$$

Từ (2.1) ta có

$$\sum_{m\leq i,k\leq M}\sum_{n\leq j,l\leq N}\mathbb{P}(A_{i,j}A_{k,l}) - \sum_{i=m}^{M}\sum_{j=n}^{N}\mathbb{P}(A_{i,j}) \leq K\sum_{\substack{(i,j)\neq(k,l)\\ m\leq i,k\leq M, n\leq j,l\leq N}}\mathbb{P}(A_{i,j})\mathbb{P}(A_{k,l}). \tag{2.12}$$

Điều này kéo theo

$$\begin{aligned}\sum_{m\leq i,k\leq M}\sum_{n\leq j,l\leq N}\mathbb{P}(A_{i,j}A_{k,l}) &\leq K\sum_{\substack{(i,j)\neq(k,l)\\ m\leq i,k\leq M, n\leq j,l\leq N}}\mathbb{P}(A_{i,j})\mathbb{P}(A_{k,l}) + \sum_{i=m}^{M}\sum_{j=n}^{N}\mathbb{P}(A_{i,j})\\ &= KT_1 + T_2.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Vì $K \geq 1$, nên từ (2.13), ta có

$$\sum_{m\leq i,k\leq M}\sum_{n\leq j,l\leq N}\mathbb{P}(A_{i,j}A_{k,l}) \leq K(T_1 + T_2). \tag{2.14}$$

Vì

$$T_1 = \sum_{\substack{(i,j)\neq(k,l)\\ m\le i,k\le M, n\le j,l\le N}} \mathbb{P}(A_{i,j})\mathbb{P}(A_{k,l}) = \left(\sum_{i=m}^{M}\sum_{j=n}^{N}\mathbb{P}(A_{i,j})\right)^2 - \sum_{i=m}^{M}\sum_{j=n}^{N}(\mathbb{P}(A_{i,j}))^2,$$

nên

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 &= \left(\sum_{i=m}^{M}\sum_{j=n}^{N}\mathbb{P}(A_{i,j})\right)^2 - \sum_{i=m}^{M}\sum_{j=n}^{N}(\mathbb{P}(A_{i,j}))^2 + \sum_{i=m}^{M}\sum_{j=n}^{N}\mathbb{P}(A_{i,j}) \\ &\le \left(\sum_{i=m}^{M}\sum_{j=n}^{N}\mathbb{P}(A_{i,j})\right)^2 + \sum_{i=m}^{M}\sum_{j=n}^{N}\mathbb{P}(A_{i,j}) = T_2^2 + T_2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Từ (2.14) và (2.15), ta suy ra

$$\sum_{m\le i,k\le M}\ \sum_{n\le j,l\le N} \mathbb{P}(A_{i,j}A_{k,l}) \le K(T_2^2 + T_2). \tag{2.16}$$

Kết hợp (2.10) và (2.16), ta có

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=m}^{M}\bigcup_{j=n}^{N} A_{i,j}\right) &\ge \frac{T_2^2}{K(T_2^2+T_2)} \\ &= \frac{T_2}{K(T_2+1)}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Giả sử $\varepsilon > 0$ là số nhỏ tùy ý cho trước. Với mọi N cố định thì $\left(\bigcup_{i=m}^{M}\bigcup_{j=n}^{N} A_{i,j}\right) \uparrow \left(\bigcup_{i=m}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{N} A_{i,j}\right)$ khi $M \to \infty$. Theo tính liên tục của xác suất ta có

$$\lim_{M\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=m}^{M}\bigcup_{j=n}^{N} A_{i,j}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=m}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{N} A_{i,j}\right).$$

Điều này kéo theo tồn tại L_1 sao cho

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=m}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{N} A_{i,j}\right) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=m}^{M}\bigcup_{j=n}^{N} A_{i,j}\right) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với mọi } M \ge L_1. \tag{2.18}$$

Mặt khác khi $N \to \infty$ thì $\left(\bigcup_{i=m}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{N} A_{i,j}\right) \uparrow \left(\bigcup_{i=m}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty} A_{i,j}\right)$. Áp dụng tính liên tục của xác suất một lần nữa, ta có

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=m}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{N} A_{i,j}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=m}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty} A_{i,j}\right).$$

Do đó, tồn tại L_2 sao cho

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=m}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty}A_{i,j}\right)-\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=m}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{N}A_{i,j}\right)<\frac{\varepsilon}{2}\text{ với mọi } N\geq L_2. \tag{2.19}$$

Kết hợp (2.18) và (2.19) ta có

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=m}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty}A_{i,j}\right)-\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=m}^{M}\bigcup_{j=n}^{N}A_{i,j}\right)<\varepsilon\text{ với mọi } M,N\geq \max\left(L_1,L_2\right). \tag{2.20}$$

Từ (2.20) và theo định nghĩa giới hạn của mảng hai chiều các số thực, ta suy ra

$$\lim_{M,N\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=m}^{M}\bigcup_{j=n}^{N}A_{i,j}\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=m}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty}A_{i,j}\right). \tag{2.21}$$

Khi $M,N\to\infty$ và m,n cố định, từ điều kiện (2.2) và (2.21), ta có

$$\frac{T_2}{T_2+1}\to 1. \tag{2.22}$$

Kết hợp (2.17), (2.21) và (2.22), ta có

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=m}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty}A_{i,j}\right)\geq\frac{1}{K}\text{ với mọi } m,n \text{ đủ lớn.}$$

Điều này kéo theo

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\vee j=n}^{\infty}A_{i,j}\right)\geq\frac{1}{K},\ n\geq 1. \tag{2.23}$$

Đặt $B_n=\bigcup_{i\vee j=n}^{\infty}A_{i,j}$, $n\geq 1$, ta dễ dàng suy ra được $B_1\supset B_2\supset\ldots.$ và

$$\limsup A_{m,n}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i\vee j=n}^{\infty}A_{i,j}=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n. \tag{2.24}$$

Kết hợp (2.23), (2.24) và tính liên tục của độ đo xác suất, ta suy ra

$$\frac{1}{K}\leq\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(B_n)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\mathbb{P}(\limsup A_{m,n}).$$

Định lý được chứng minh. □

Từ Định lý 2.1, ta thu được hệ quả sau đây. Kết quả này là Định lý 2.1 của Petrov [4].

Hệ quả 2.2. Giả sử $\{A_n, n \geq 1\}$ là dãy các biến cố thỏa mãn

$$\mathbb{P}(A_iA_j) \leq K\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) \text{ với mọi } i \neq j, \tag{2.25}$$

trong đó $K \geq 1$ là hằng số. Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty, \tag{2.26}$$

thì

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) \geq \frac{1}{K}. \tag{2.27}$$

Chứng minh. Chọn $\{A_{1,n} = A_n, A_{m,n} = \emptyset, m > 1, n \geq 1\}$ là mảng hai chiều các biến cố. Khi đó (2.25) và (2.26) đảm bảo cho (2.1) và (2.2) được thỏa mãn. Áp dụng Định lí 2.1, ta có

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{j\geq n} A_j\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{i\vee j\geq n} A_{i,j}\right) \geq 1/K.$$

Hệ quả được chứng minh. □

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] R. Arthan and P. Oliva, "On the Borel–Cantelli lemmas, the Erdos-Renyi theorem, and the Kochen–Stone theorem," *Arxiv Preprint*, 2020.

[2] K. L. Chung and P. Erdos, "On the application of the Borel-Cantelli lemma," *Trans. American Math. Soc.*, **72**, 179–186, 1952.

[3] S. Kochen and C. Stone, "A note on the Borel–Cantelli lemma," *Illinois J. Math.*, **8**, 248–251, 1964.

[4] V. V. Petrov, "A note on the Borel–Cantelli lemma," *Statist. Probab. Lett.*, **58**, 283–286, 2002.

[5] L. Liu, "Precise large deviations for dependent random variables with heavy tails," *Statist. Probab. Lett.*, **79**, 1290–1298, 2009.

[6] Nguyen Van Quang, Duong Xuan Giap, Bui Nguyen Tram Ngoc and Tien-Chung Hu, "Some strong laws of large numbers for double arrays of random sets with gap topology," *J. Convex Anal.*, **26**, No. 3, 719–738, 2019.

[7] A. Rosalsky and Le Van Thanh, "Weak laws of large numbers for double sums of independent random elements in Rademacher type p and stable type p Banach spaces," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* **71** No.12, e1065–e1074, 2009.

[8] A. Rosalsky and Le Van Thanh, "Strong and weak laws of large Numbers for double sums of independent random elements in Rademacher type p Banach spaces," *Stochastic Anal. Appl.*, **24**, No. 6, 1097–1117, 2006.

[9] Le Van Thanh, "Strong law of large numbers and L^p-convergence for double arrays of independent random variables," *Acta Math. Vietnam.*, **30**, No. 3, 225-–232, 2005.

SUMMARY

ON AN EXTENSION OF THE BOREL–CANTELLI LEMMA FOR DOUBLE ARRAYS OF DEPENDENT EVENTS

Nguyen Thi Ngoc Anh, Nguyen Thi Binh,
Le Van Thanh, Nguyen Thi Phuong Thao
School of Natural Sciences Education, Vinh University
Received on 24/9/2020, accepted for publication on 15/12/2020

In this paper, we present an extension of the Borel–Cantelli lemma for double arrays of dependent events. From our main result, we obtain Theorem 2.1 of Petrov [Statistics and Probability Letters, 2002] and the Borel–Cantelli lemma for double arrays of pairwise independent events as special cases.

Keywords: Borel-Cantelli lemma; double array; dependent random variables.